

CÁLCULO DE GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL. Tatiana Fernandes Sodero, Alice Kimie Miwa Libardi - Matemática - Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro.

Um dos objetivos da Topologia Algébrica é descrever a estrutura geométrica de um espaço topológico X associando a ele um sistema algébrico, geralmente um grupo $G(X)$.

Se $X = S^1$, o círculo unitário em \mathbb{R}^2 , então intuitivamente o grupo associado $G(S^1)$ é gerado por um elemento já que S^1 possui um "buraco". Se X é a figura "oito" então o grupo associado é gerado por dois elementos.

Além disso, esse grupo é um invariante topológico, isto é, dados dois espaços topológicos homeomorfos, seus respectivos grupos associados são isomorfos. Os invariantes topológicos são ferramentas para se obter uma classificação dos espaços, a menos de homeomorfismos. Exemplos desses grupos são os grupos de homologia simplicial, $H_*(X)$. Neste trabalho calculamos $H_*(S^2)$ e $H_*(P^2)$, onde S^2 é a esfera e P^2 o plano projetivo.

Definições: Seja $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ um conjunto de pontos geometricamente independentes de \mathbb{R}^n . Um k -simplexo σ^k gerado por A é o conjunto de todos os pontos x em \mathbb{R}^n no qual existem números reais não negativos $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ tal que $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Um simplexo σ^k é uma face de um simplexo σ^n , $k \leq n$, se cada vértice de σ^k é também vértice de σ^n . Se σ^n é o simplexo com vértices a_0, \dots, a_n escrevemos $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$.

Observe que um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo (interior e bordo) e um 3-simplexo é um tetraedro (interior e bordo).

Um complexo simplicial é uma família finita K de simplexos que são propriamente ligados e tem a propriedade de que cada face de um membro de K é também membro de K . A união dos membros de K com a topologia induzida do \mathbb{R}^n é denotada por $|K|$ e chamada de poliedro associado a K .

Seja X um espaço topológico. Se existe um complexo simplicial K tal que $|K|$ é homeomorfo a X , então X é dito ser um espaço triangulável, e o complexo K é chamado uma triangulação de X .

Um n -simplexo orientado, $n \geq 1$, é obtido a partir de um n simplexo σ^n escolhendo uma ordem para os vértices. A classe de equivalência das permutações pares e ímpares da ordem escolhida determina o simplexo positivamente orientado $+\sigma^n$ e negativamente orientado $-\sigma^n$ respectivamente. Um complexo simplicial orientado é obtido a partir de um complexo simplicial determinando uma orientação para cada um dos seus simplexos. convencionase que um 0-simplexo $\langle a_0 \rangle$ é positivamente orientado.

Se K é um complexo simplicial orientado, associamos cada par (σ^{p+1}, σ^p) um número de incidência $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$, definido a seguir: se σ^p não é face de σ^{p+1} , então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Suponha σ^p face de σ^{p+1} . Classifique os vértices a_0, \dots, a_p de σ^p tal que $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$. Seja v o vértice de σ^{p+1} que não está em σ^p . Então $+\sigma^{p+1} = \pm \langle va_0 \dots v_p \rangle$. Se $+\sigma^{p+1} = +\langle va_0 \dots v_p \rangle$ então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$. Se $+\sigma^{p+1} = -\langle va_0 \dots v_p \rangle$ então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$.

Seja K um complexo simplicial orientado. Se p é um inteiro positivo, uma p -cadeia é uma função c_p da família dos p -simplexos orientados de K nos inteiros tal que, para cada p -simplexo σ^p , $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$. Com a adição ponto a ponto induzida pelos inteiros, a família das p -cadeias forma um grupo chamado de grupo das cadeias p -dimensionais e é denotado por $C_p(K)$. Uma p -cadeia elementar é uma p -cadeia c_p no qual existe um p -simplexo σ^p tal que $c_p(\tau^p) = 0$ para cada p -simplexo τ^p distinto de σ^p . Uma p -cadeia elementar é denotada por $g\sigma^p$ onde $g = c_p(+\sigma^p)$. Com esta notação, uma p -cadeia arbitrária d_p pode ser expressa como uma soma formal finita $d_p = \sum g_i \sigma_i^p$. O bordo de uma p -cadeia elementar $g\sigma^p$, $\partial(\sigma^p)$ é definido por: $\partial(\sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \sigma_i^{p-1}$, $\sigma_i^{p-1} \in K$.

O operador bordo é estendido por linearidade a um homomorfismo $\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$, ou seja, se $c_p = \sum g_i \sigma_i^p$ é uma p -cadeia arbitrária, então $\partial(c_p) = \sum \partial(g_i \sigma_i^p)$. O bordo de uma 0-cadeia é definido sendo zero.

Um p-ciclo é uma p-cadeia z_p tal que $\partial(z_p) = 0$. A família dos p-ciclos é um subgrupo de $C_p(K)$, denotado por $Z_p(K)$ e é chamado de grupo dos p-ciclos. Se $p \geq 0$, uma p-cadeia b_p é um p-bordo se existe uma (p+1)-cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = b_p$. A família dos p-bordos é um subgrupo de $C_p(K)$, chamado grupo dos p-bordos e é denotado por $B_p(K)$.

Dois p-ciclos w_p e z_p no complexo K são homólogos, escreve-se $w_p \sim z_p$, desde que exista um (p+1)-cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$.

Esta relação é de equivalência e divide $Z_p(K)$ em classes de homologia $[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\}$. A classe de homologia $[z_p]$ é, de fato, a classe lateral $z_p + B_p(K)$. Consequentemente as classes de homologia são os elementos do grupo quociente $\frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$.

O grupo quociente $H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$ é chamado de grupo de homologia p-dimensional de K .

Teorema: Os grupos de homologia simplicial das superfícies S^2 e P^2 são:

$H_n(S^2) = \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}$ com $n = 0, 1, 2$ respectivamente

$H_n(P^2) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, 0$ com $n = 0, 1, 2$ respectivamente

Demonstração: Calculemos primeiramente os grupos de homologia da esfera. Consideremos a triangulação K como na figura 1.

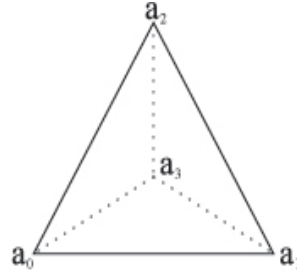


Figura 1

Para o cálculo de $H_2(K)$, observemos que como não existe nenhum 2-simplexo em K , temos, por definição, que $B_2(K) = 0$.

Seja c_2 uma 2-cadeia arbitrária. Então c_2 é da forma: $c_2 = g_0 < a_0 a_1 a_2 > + g_1 < a_0 a_1 a_3 > + g_2 < a_0 a_2 a_3 > + g_3 < a_1 a_2 a_3 >$, com $g_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, 3$

Observemos que $\partial(c_2) = (g_0 + g_1) < a_0 a_1 > + (g_2 - g_0) < a_0 a_2 > + (-g_1 - g_2) < a_0 a_3 > + (g_0 + g_3) < a_1 a_2 > + (g_1 - g_3) < a_1 a_3 > + (g_2 + g_3) < a_2 a_3 >$.

Para que c_2 seja um 2-ciclo, temos que $\partial(c_2) = 0$. Para isso, os coeficientes dos 1-simplexos acima são todos zero, e portanto $-g_1 = g_0 = -g_3 = g_2$. Portanto, $Z_2(K) = \mathbb{Z}$.

Desta forma $H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \mathbb{Z}$.

Calculemos agora $H_1(K)$. Seja c_1 uma 1-cadeia arbitrária. Então c_1 é da forma: $c_1 = g_0 < a_0 a_1 > + g_1 < a_0 a_2 > + g_2 < a_0 a_3 > + g_3 < a_1 a_2 > + g_4 < a_1 a_3 > + g_5 < a_2 a_3 >$, com $g_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, 5$.

Observemos que $\partial(c_1) = (-g_0 - g_1 - g_2) < a_0 > + (g_0 - g_3 - g_4) < a_1 > + (g_1 + g_3 - g_5) < a_2 > + (g_2 + g_4 + g_5) < a_3 >$. Para que c_1 seja um 1-ciclo temos que $\partial(c_1) = 0$, e para isso temos que:

$$\begin{cases} g_0 = g_3 + g_4 \\ g_1 = g_5 - g_3 \\ g_2 = -g_4 - g_5 \end{cases}$$

Portanto, $c_1 = (g_3 + g_4) < a_0 a_1 > + (-g_3 + g_5) < a_0 a_2 > + (-g_4 - g_5) < a_0 a_3 > + (g_3) < a_1 a_2 > + (g_4) < a_1 a_3 > + (g_5) < a_2 a_3 > = g_3 (< a_0 a_1 > - < a_0 a_2 > + < a_1 a_2 >) + g_4 (< a_0 a_1 > - < a_0 a_3 > + < a_1 a_3 >) + g_5 (< a_0 a_2 > - < a_0 a_3 > + < a_2 a_3 >) = \partial(g_3 < a_0 a_1 a_2 > + g_4 < a_0 a_1 a_3 > + g_5 < a_0 a_2 a_3 >)$

Portanto, todo 1-ciclo é um 1-bordo. Assim temos que $H_1(K) = 0$.

Calculemos agora $H_0(K)$. Como por definição $\partial(c_0) = 0$ para toda 0-cadeia c_0 , temos que toda 0-cadeia é um 0-ciclo. Uma 0-cadeia c_0 é da forma: $c_0 = \alpha_0 < a_0 > + \alpha_1 < a_1 > + \alpha_2 < a_2 > + \alpha_3 < a_3 >$, com $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ e α_3 quaisquer inteiros. Assim $Z_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Calculemos agora $B_0(K)$: Seja c_1 uma 1-cadeia e $\partial(c_1)$ dados anteriormente. Então para que uma 0-cadeia c_0 seja um 0-bordo, deve existir c_1 tal que $\partial(c_1) = c_0$. Assim, precisamos que: $(-g_0 - g_1 - g_2) < a_0 > + (g_0 - g_3 - g_4) < a_1 > + (g_1 + g_3 - g_5) < a_2 > + (g_2 + g_4 + g_5) < a_3 > = \alpha_0 < a_0 > + \alpha_1 < a_1 > + \alpha_2 < a_2 > + \alpha_3 < a_3 >$. Assim, temos que: $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Portanto, $c_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < a_0 > + \alpha_1 < a_1 > + \alpha_2 < a_2 > + \alpha_3 < a_3 >$. Logo $B_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}$$

Desconfiamos que $H_0(K) = \mathbb{Z}$. De fato, seja c_0 qualquer. Observemos que: $c_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < a_0 > = \partial(\alpha_1 < a_0 a_1 > + \alpha_2 < a_0 a_2 > + \alpha_3 < a_0 a_3 >)$. Portanto todo c_0 é homólogo a $(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < a_0 >$

Assim, $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

Antes de continuarmos, faremos algumas considerações: Se c_p é uma p-cadeia tal que cada (p-1)-face é face de exatamente dois p-simplexos teremos que:

ou: $[\sigma_1^p, \sigma^{p-1}] = [\sigma_2^p, \sigma^{p-1}]$ (σ^{p-1} é chamada de tipo I)

ou: $[\sigma_1^p, \sigma^{p-1}] = -[\sigma_2^p, \sigma^{p-1}]$ (σ^{p-1} é chamada de tipo II)

$$c_p = \sum_i g_i \sigma_i^p \Rightarrow \partial(c_p) = \sum_i \partial(g_i \sigma_i^p) = \sum_i \sum_j [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] g_i \sigma_j^{p-1} = \sum_j \sigma_j^{p-1} \sum_i g_i [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}]$$

Podemos ordenar a soma e escrever, sem perda de generalidade, que:

$$\partial(c_p) = \sigma_1^{p-1} \sum_{i=1,2} [\sigma_i^p, \sigma_1^{p-1}] g_i + \sigma_2^{p-1} \sum_{i=2,3} [\sigma_i^p, \sigma_2^{p-1}] g_i + \dots + \sigma_k^{p-1} \sum_{i=k,1} [\sigma_i^p, \sigma_k^{p-1}] g_i$$

Se σ_j^{p-1} são do tipo II teremos: $\partial(c_p) = \sigma_1^{p-1}(\pm(g_1 - g_2)) + \sigma_2^{p-1}(\pm(g_2 - g_3)) + \dots + \sigma_k^{p-1}(\pm(g_k - g_1))$. Para que c_p seja um ciclo temos que:

$$g_1 = g_2 = g_3 = \dots = g_k = g_1 = h$$

Se σ_j^{p-1} são do tipo I teremos: $\partial(c_p) = \sigma_1^{p-1}(\pm(g_1 + g_2)) + \sigma_2^{p-1}(\pm(g_2 + g_3)) + \dots + \sigma_k^{p-1}(\pm(g_k + g_1))$ Para que c_p seja um ciclo temos que:

$$g_1 = -g_2 = g_3 = -g_4 = \dots = \pm g_k = \pm g_1 = g$$

Calculemos agora os grupos de homologia do Plano Projetivo.

Consideremos a triangulação P como na figura 2 :

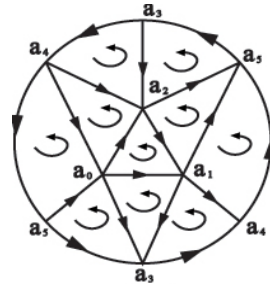


Figura 2

No P^2 não existe nenhum 3-simplexo, então $B_2(P) = \{0\}$. Cada 1-simplexo σ^1 de P é face de exatamente dois 2-simplexos σ_1^2 e σ_2^2 . Observe que quando σ^1 é $< a_3 a_4 >$, $< a_4 a_5 >$ ou $< a_5 a_3 >$ temos que σ^1 é do tipo I e para qualquer outro σ^1 é do tipo II.

Seja w um 2-ciclo. Então $w = \sum_i g_i \sigma_i^2 \Rightarrow \partial(w) = \sum_i \partial(g_i \sigma_i^2) = \sum_i \sum_l [\sigma_i^2, \sigma_l^1] \sigma_l^1 \cdot g_i =$

$= \sum_i (\sum_j [\sigma_i^2, \sigma_j^1] \sigma_j^1 \cdot g + \sum_k [\sigma_i^2, \sigma_k^1] \sigma_k^1 h)$, onde σ_j^1 é do tipo I e σ_k^1 é do tipo II.

Mas, $\sum_k [\sigma_i^2, \sigma_k^1] \sigma_k^1 h = 0$

Então, $\partial(w) = \sum_i \sum_j [\sigma_i^2, \sigma_j^1] \sigma_j^1 \cdot g = \sum_j 2\sigma_j^1 \cdot g = 2g < a_3 a_4 > + 2g < a_4 a_5 > + 2g < a_5 a_3 >$.

Assim w é um 2-ciclo apenas se $g = 0$. Então $Z_2(P) = \{0\}$ e assim $H_2(P) = \{0\}$.

Vemos pela figura 2 (o cálculo será omitido por ser longo) que o ciclo $z = \langle a_3a_4 \rangle + \langle a_4a_5 \rangle + \langle a_5a_3 \rangle$ não é um bordo, e mais, kz , quando k é ímpar não é bordo, e se k for par, kz é bordo. Para esta demonstração basta tomar um 2-cadeia, calcular seu bordo, supor que z é bordo, igualar os termos e desta forma chega-se em um absurdo.

Vemos também que todo 1-ciclo é homólogo a um múltiplo de z . Para esta demonstração, tomamos um 1-ciclo qualquer. Deste, subtraímos kz e verificamos que é um bordo. Assim, um 1-ciclo será homólogo a um múltiplo ímpar de z ou será por si um bordo e desta forma, será homólogo a um múltiplo par de z já que este é um bordo. Então $H_1(P) = \mathbb{Z}_2$. Este resultado indica que a superfície possui uma torção (a recíproca é falsa).

Calculemos agora $H_0(P)$. Como por definição $\partial(c_0) = 0$ para toda 0-cadeia c_0 , temos que toda 0-cadeia é um 0-ciclo. Uma 0-cadeia c_0 é da forma: $c_0 = \alpha_0 \langle a_0 \rangle + \alpha_1 \langle a_1 \rangle + \alpha_2 \langle a_2 \rangle + \alpha_3 \langle a_3 \rangle + \alpha_4 \langle a_4 \rangle + \alpha_5 \langle a_5 \rangle$, com $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e α_5 quaisquer inteiros. Assim $Z_0(P) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Calculemos agora $B_0(P)$: Seja c_1 uma 1-cadeia, então $c_1 = g_0 \langle a_0a_1 \rangle + g_1 \langle a_0a_2 \rangle + g_2 \langle a_0a_3 \rangle + g_3 \langle a_4a_0 \rangle + g_4 \langle a_5a_0 \rangle + g_5 \langle a_2a_1 \rangle + g_6 \langle a_1a_3 \rangle + g_7 \langle a_1a_4 \rangle + g_8 \langle a_1a_5 \rangle + g_9 \langle a_3a_2 \rangle + g_{10} \langle a_4a_2 \rangle + g_{11} \langle a_2a_5 \rangle + g_{12} \langle a_3a_4 \rangle + g_{13} \langle a_5a_3 \rangle + g_{14} \langle a_4a_5 \rangle$.

$\partial(c_1) = \langle a_0 \rangle (-g_0 - g_1 - g_2 + g_3 + g_4) + \langle a_1 \rangle (g_0 + g_5 - g_6 - g_7 - g_8) + \langle a_2 \rangle (g_1 - g_5 + g_9 + g_{10} - g_{11}) + \langle a_3 \rangle (g_2 + g_6 - g_9 - g_{12} + g_{13}) + \langle a_4 \rangle (-g_3 + g_7 - g_{10} + g_{12} - g_{14}) + \langle a_5 \rangle (-g_4 + g_8 + g_{11} - g_{13} + g_{14})$.

Então, para que uma 0-cadeia c_0 seja um 0-bordo, deve existir c_1 tal que $\partial(c_1) = c_0$. Assim temos que $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$ e, portanto $c_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \langle a_0 \rangle + \alpha_1 \langle a_1 \rangle + \alpha_2 \langle a_2 \rangle + \alpha_3 \langle a_3 \rangle + \alpha_4 \langle a_4 \rangle + \alpha_5 \langle a_5 \rangle$. Logo $B_0(P) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

$$H_0(P) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}.$$

Desconfiamos que $H_0(P) = \mathbb{Z}$. De fato, seja c_0 qualquer. Observemos que: $c_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \langle a_0 \rangle = \partial(\alpha_1 \langle a_0a_1 \rangle + \alpha_2 \langle a_0a_2 \rangle + \alpha_3 \langle a_0a_3 \rangle - \alpha_4 \langle a_4a_0 \rangle - \alpha_5 \langle a_5a_0 \rangle)$. Portanto todo c_0 é homólogo a $(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \langle a_0 \rangle$

Portanto, $H_0(P) = \mathbb{Z}$. ■

Referências Bibliográficas:

CROOM, F.H. **Basic Concepts of Algebraic Topology - Ungraduate Texts in Mathematics**. Springer Verlag, 1978.

KOSNIOWSKI, C. **A First Course in Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 1980.